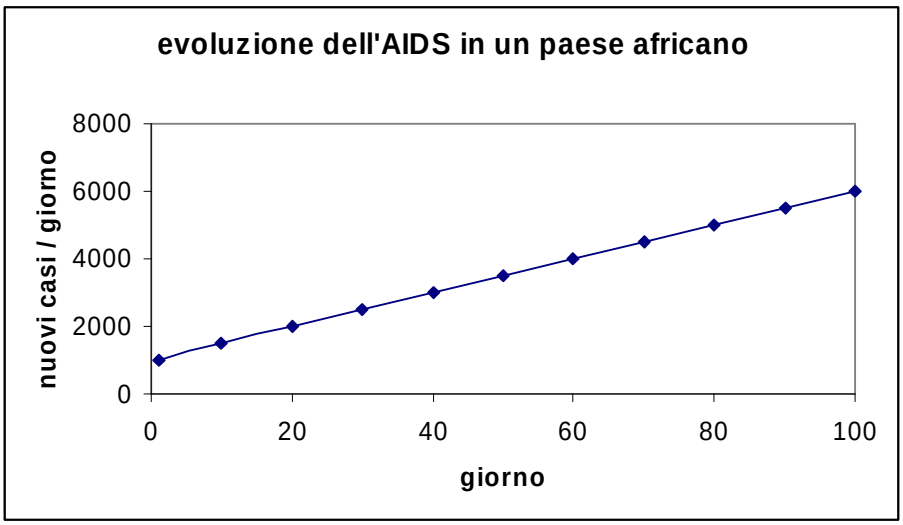
ALLEGATO Capitolo 2: Esercizi e problemi risolti

Esercizio 1

Il grafico sottostante rappresenta il numero di nuovi **casi di AIDS al giorno** segnalati all'organizzazione mondiale della sanità (OMS) da un certo paese africano.

a) Se $\dot{X}(t)$ indica i nuovi **casi di AIDS al giorno**, a cosa corrisponde la grandezza *X*?
b) Scrivi l'equazione di bilancio completa per la grandezza *X*.
c) Disegnare un grafico che **rappresenti *X*(*t*).**
d) Che tipo di informazioni fornisce **l'area sotto la curva del grafico di** $\dot{X}(t)$? Spiega!



Soluzioni e commenti

a) *X* corrisponde al numero di malati di AIDS.
b) $\dot{X}(t) = I_X + \pi_X$, dove I_X indica l'eventuale flusso (netto) di malati da, o verso l'esterno del paese; e π_X corrisponde alla "produzione" di malati, cioè al contagio e alla nascita di bambini infettati, e alla "distruzione" di malati, cioè alle morti o alle (improbabili) guarigioni dei malati.
c) La curva è un ramo di parabola rivolto verso l'alto.
d) L'area sotto la curva indica la variazione del numero di malati, ΔX, nell'intervallo di tempo considerato. In questo caso abbiamo: $\Delta X \approx 350'000$ malati

Esercizio 2

In un piccolo bacino idrico artificiale entra acqua con un flusso di 8.5 m^3/s e ne esce con un flusso di 5.2 m^3/s.

a) Il bacino idrico è un sistema chiuso, aperto o isolato?
b) Disegna uno schizzo del sistema e scrivi l'equazione di bilancio che regola la variazione istantanea del volume d'acqua nel bacino.
c) Di quanto varia il volume d'acqua nel bacino in 10 s?
d) Rappresenta graficamente l'andamento del volume d'acqua del bacino nel tempo.
e) Come puoi caratterizzare la *variazione istantanea* ad un dato istante *t*?

Soluzioni e commenti

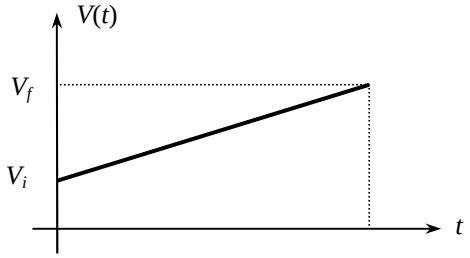
a) Il bacino idrico è un sistema aperto: ci sono delle correnti in entrata e in uscita dal sistema.
b) La grandezza in esame è il volume d'acqua V, quindi l'equazione di bilancio diventa:

$$\dot{V} = I_V = I_V^{in} + I_V^{out}\,, \qquad \text{poiché non ci sono i termini di produzione e distruzione.}$$

Nel nostro caso abbiamo: $\dot{V}$ = 8.5 m^3/s - 5.2 m^3/s = 3.3 m^3/s

c) In 10 s il volume varia di $\Delta V = \dot{V} \cdot \Delta t$ = (3.3 m^3/s) · 10 s = 33 m^3/s

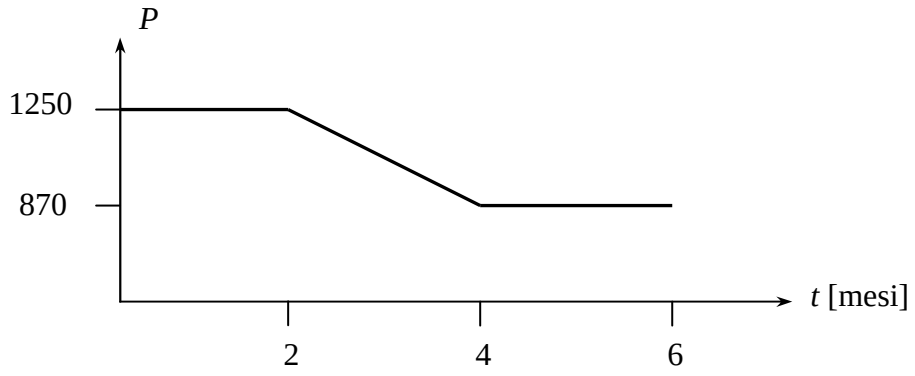
d)



e) La variazione istantanea $\dot{V}$ è rappersentata dalla ***pendenza*** grafico di $V(t)$. La pendenza della retta nel grafico vale 3.3 m^3/s.

Esercizio 3

Il grafico sottostante rappresenta l'evoluzione temporale della popolazione di un certo villaggio.

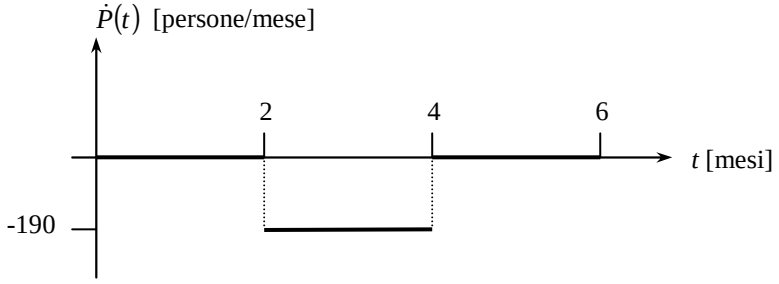


Sapendo che il tasso di nascite e di morti rimane *costante* durante tutti i sei mesi di tempo considerati, con $\pi_P^+ = 12$ persone al mese e $\pi_P^- = 17$ persone al mese:

a) disegna il grafico della variazione istantanea $\dot{P}$;
b) determina, a partire dal grafico di $\dot{P}$, la variazione della popolazione ΔP dopo sei mesi, e verifica il risultato con quello che si ottiene dal grafico di P;
c) disegna il grafico della popolazione scambiata con l'esterno I_P.
d) determina il numero di persone scambiate con l'esterno P_{sc} dopo sei mesi.
e) Se tra due e sei mesi si verifica una immigrazione costante $I_P^{in} = 28$ persone al mese, calcola quanto vale l'emigrazione I_P^{out} nello stesso lasso di tempo.
f) Indica in quale intervallo di tempo si ha a che fare con un regime stazionario oppure d'equilibrio.

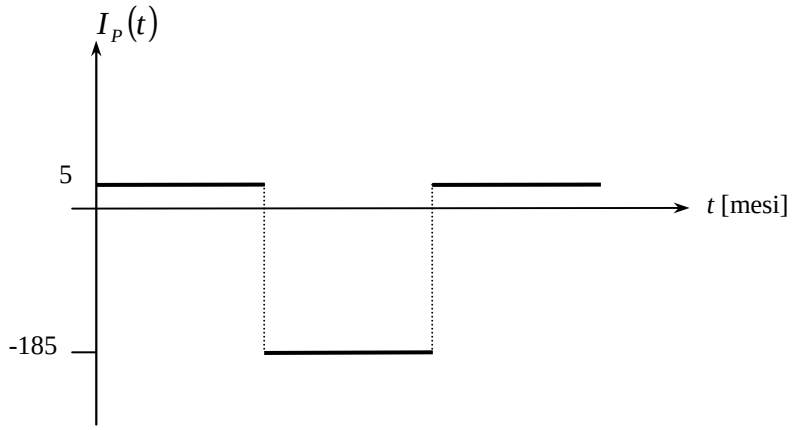
Soluzioni e commenti

a)



b) Tra due e quattro mesi la popolazione subisce una diminuzione di 190 persone al mese (valore che corrisponde alla ***pendenza*** del segmento obliquo nel grafico di $P(t)$). Dal grafico della variazione istantanea $\dot{P}(t)$ possiamo ricavare la variazione ΔP calcolando l'***area*** tra due e quattro mesi: $\Delta P = 2 mesi \cdot (-190\, persone/mese) = -380\, persone$.
Tale risultato lo si può leggere sul grafico di $P(t)$: $\Delta P = P_f - P_i = 1250 - 870 = -380$ persone

c)



Dall'equazione di bilancio abbiamo: $\dot{P} = I_P + \pi_P = I_P - 5$ (persone al mese). Perciò da 0 a 2 mesi, come da 4 a 6 mesi si ha una corrente positiva di 5 persone al mese ($\dot{P} = 0$), mentre da 2 a 4 mesi si ha una corrente (in uscita) di -185 persone al mese ($\dot{P} = -190$).

d) Le persone scambiate con l'esterno sono date dall'***area*** del grafico di I_P: $P_{sc} = -350$ pers.

e) Siccome $I_P = I_P^{in} + I_P^{out} = 28 + I_P^{out}$, abbiamo tra 2 e 4 mesi $I_P^{out} = -213$ persone al mese, e tra 4 e 6 mesi $I_P^{out} = -23$ persone al mese.

f) Si ha un regime stazionario ($\dot{P} = 0$, con I e $\pi \neq 0$) tra 0 e 2 mesi, e tra 4 e 6 mesi.

Esercizio 4

Il filosofo Luciano di Samosata, nella sua opera *Vita di Demonatte*, racconta che qualcuno chiese all'antico pensatore: "*Quante mine di fumo si ottengono bruciando 1000 mine di legna?*". La risposta fu: "*Pesa la cenere: quanto resta è fumo*!".Si ammetta che per "fumo" Demonatte abbia inteso tutte le sostanze che vengono liberate nell'aria durante una combustione.

a) Quali sono le principali sostanze liberate nell'aria durante una combustione?
b) Qual è la componente principale della legna? A quale classe di sostanze appartiene?
c) Da quali sostanze è costituita la cenere?
d) La risposta di Demonatte può essere considerata corretta anche giorno d'oggi?

Soluzioni e commenti

a) **Anidride carbonica (CO_2) e vapore acqueo (H_2O) sono le più importanti. A dipendenza dei casi possono formarsi anche CO, NO, NO_2, e, nel caso di combustibili ad alto tenore di zolfo, anche SO_2.**
b) **La cellulosa, un polisaccaride del glucosio.**
c) **Il colore biancastro della cenere deriva dai sali minerali (in particolare di potassio)**
d) **Demonatte partiva dalla seguente idea di reazione: legna → fumo + cenere.**
In realtà non si rendeva conto di aver dimenticato l'ossigeno (…ma la cosa risultò chiara solo con Lavoisier molti secoli dopo!)

Esercizio 5

In un locale è accesa una stufa a carbone. Per semplicità supponi che la combustione del carbone avvenga "in due tempi" secondo le seguenti equazioni chimiche:
1) carbonio + ossigeno → monossido di carbonio
2) monossido di carbonio + ossigeno → diossido di carbonio

a) Scrivi le due equazioni chimiche bilanciate
b) Il locale in cui è accesa una stufa a carbone è un sistema chiuso, aperto o isolato?
c) Disegna uno schizzo del sistema indicando tutte le possibilità che portano alla variazione della concentrazione di monossido di carbonio nel locale (considera le correnti in entrata ed in uscita, e la produzione e distruzione della sostanza)
d) In base allo schema del punto precedente cerca di evidenziare tutti i meccanismi che portano ad un aumento della concentrazione di monossido di carbonio in un locale insufficientemente areato.

Soluzioni e commenti

a) $2C + O_2 \rightarrow 2CO$
$2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$
b) Il sistema è aperto: considerare in particolare il camino!
c) Nell'equazione di bilancio si considera una sola **grandezza estensiva** alla volta. Qui è utile considerare il **numero** di molecole di monossido di carbonio (N_{co}) presenti nel locale. Non bisogna usare la concentrazione che è una grandezza estensiva!
Correnti:
$I_{in\,(CO)}$: praticamente trascurabile (a meno che il locale sia situato in una città inquinata)
$I_{out(CO)}$: principalmente (ma non solo!) attraverso il camino
Produzione e distruzione:
Produzione: $2C + O_2 \rightarrow 2CO$
Distruzione: $2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$
Da notare: produzione e distruzione sono due processi differenti (che hanno anche velocità differenti!). Se il processo di distruzione del CO (ovvero la velocità di reazione con l'ossigeno dell'aria) fosse rapidissimo, non ci sarebbe mai il pericolo di avvelenamento da ossido di carbonio! Possiamo inoltre assumere che i processi inversi $2CO \rightarrow 2C + O_2$, rispettivamente $2CO_2 \rightarrow 2CO + O_2$ abbiano un'importanza trascurabile. Questo vale sicuramente a temperature non eccessivamente elevate (sicuramente all'interno del camino oppure del locale, e probabilmente anche in buona parte della zona all'interno della stufa).
In un locale scarsamente areato **diminuiscono tutte le correnti in entrata ed in uscita**: nel nostro caso potrebbe essere particolarmente importante **la diminuzione di $I_{out(CO)}$:** ci si dovrebbe dunque aspettare un aumento della concentrazione di CO nel locale.

Inoltre, visto che la stufa "non tira più bene" per insufficiente apporto di aria, si potrebbe supporre che **all'interno della stufa** si abbia una **concentrazione di ossigeno inadeguata** per alimentare una completa combustione del carbone.
Si noti come le velocità delle due reazioni viste prima (di produzione e distruzione del CO) dipendano entrambe dalla concentrazione di ossigeno presente. Se (proprio a causa della scarsità di ossigeno) **la velocità di produzione di CO** risultasse essere **più veloce** di **quella che vede la sua distruzione**, si arriverebbe sicuramente ad un progressivo aumento del numero di molecole di CO presenti nei fumi e, di riflesso, anche nel locale mal areato.

Esercizio 6

Contrariamente a quanto si possa pensare, la gobba del dromedario non è piena di acqua, ma contiene grandi quantità di grassi la cui componente principale è la **tristearina ($C_{57}H_{110}O_6$).** Supponi ora che nel tessuto adiposo del dromedario il grasso venga ossidato completamente e che venga prodotta unicamente acqua ed anidride carbonica.

a) Scrivi l'equazione chimica bilanciata del processo.
b) Effettua un primo bilancio basato sulla **quantità di sostanze**: quante **moli** di acqua si liberano dall'ossidazione di una **mole** di tristearina?
c) Effettua un secondo bilancio basato sulle masse: quanti **grammi** di acqua si liberano dall'ossidazione di **un grammo** di tristearina?
d) Sei in grado di spiegare perché la gobba del dromedario è piena grasso e non di acqua?

Soluzioni e commenti

a) $2\ C_{57}H_{110}O_6 + 163\ O_2 \rightarrow 114\ CO_2 + 110\ H_2O$
b) **Una mole** di tristearina libera (cioè produce) **55 moli** di acqua
c) L'ossidazione di **1,000 g** di tristearina libera **1,112 g** di acqua.
d) La massa di acqua prodotta dal processo di ossidazione (il termine biologico è **acqua metabolica**) è superiore alla massa di tristearina che è stata ossidata. Oltre che a liberare energia, il processo produce una massa di acqua metabolica superiore alla massa del grasso di riserva tristearina. Il dromedario produce per ossidazione una quantità di acqua più grande di quella che potrebbe trasportare nella gobba!

Esercizio 7

In un appartamento si trova una vasca con dei pesci rossi. I pesci vengono nutriti con del mangime secco: ad intervalli regolari il proprietario aggiunge acqua alla vasca in modo da mantenerne costante il livello.

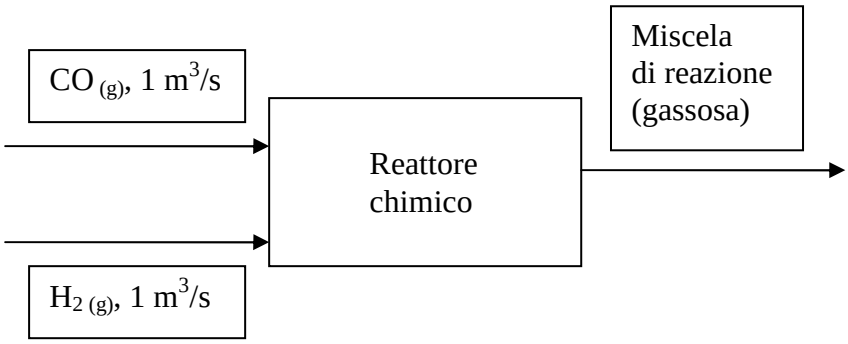
a) La vasca con i pesci rossi è un sistema chiuso, aperto o isolato?
b) Disegna uno schizzo del sistema indicando le correnti di acqua in uscita ed in entrata dal sistema. Indica anche gli eventuali nomi scientifici appropriati.
c) Vi sono correnti d'acqua tra i pesci e l'acqua della vasca? Considera tutti i possibili meccanismi di entrata e di uscita dell'acqua dal pesce.
d) Vi è produzione o distruzione di acqua nel pesce? Considera le principali funzioni fisiologiche del pesce (ingestione, digestione, respirazione, escrezione,…)e determina se questi processi provocano, dal punto di vista biochimico, la creazione o la distruzione di molecole di acqua.

Soluzioni e commenti

a) Il sistema è aperto: si noti in particolare che l'acqua persa per evaporazione viene rimessa nella vasca (questa volta in forma liquida) dal proprietario.
b) I_{in} (H_2O): corrisponde all'acqua versata nella vasca dal proprietario.
I_{out} (H_2O): **evaporazione** dell'acqua dalla vasca.
c) Il **sistema** che adesso si considera è il singolo organismo vivente, ovvero il **pesce**. Le correnti di acqua più consistenti sono quelle che attraversano le **branchie**. Da notare che l'acqua può anche entrare nel pesce con l'ingestione del cibo. Acqua esce dal pesce con le secrezioni, ma anche con la respirazione (in questo caso è acqua che è stata prodotta all'interno del pesce per via biochimica: vedi sotto)
d) **- Produzione di molecole di acqua**.
Diverse reazioni metaboliche portano alla liberazione di molecole di acqua. In particolare la **respirazione cellulare**: glucosio + diossigeno → anidride carbonica + acqua
Le reazioni di **condensazione** liberano anch'esse acqua, come ad esempio:
glucosio → glicogeno + acqua
amminoacidi → polipeptide + acqua
- Distruzione di molecole di acqua
Diverse reazioni metaboliche richiedono acqua come reagente, dunque si può dire che distruggano molecole di acqua. È il caso delle varie reazioni di **idrolisi** che avvengono durante la **digestione**: polisaccaridi + acqua → zuccheri semplici
proteine + acqua → amminoacidi
trigliceridi + acqua → acidi grassi + glicerolo
Negli animali che vivono in zone desertiche l'apporto di acqua dall'esterno è molto limitato: la maggior parte dell'acqua viene prodotta grazie alle reazioni metaboliche che avvengono all'interno dell'organismo. Per capire il bilancio idrico di un organismo dobbiamo considerare che **l'idrolisi di un polisaccaride composto da N resti glucosidici richiede N-1 molecole di acqua**. L'ossidazione completa di **una singola molecola di glucosio** produce però ben **sei molecole di acqua**! Considerazione simili valgono anche per gli altri alimenti.

Esercizio 8

Lo schema sottostante rappresenta un impianto per la produzione di **metanolo** allo stato gassoso: **CH_4O (g). Considera che i reagenti che la miscela di reazione si trovino alle stesse condizioni.**



a) **Scrivi l'equazione chimica (bilanciata**) per la sintesi del metanolo.
b) Quanti **metri cubi di metanolo (g)** si possono produrre a partire da **1m^3 di H_2?**
c) Supponi che il flusso delle sostanze in entrata ed in uscita dal reattore sia costante. Il sistema rappresentato dal reattore sarebbe in un regime **di equilibrio** oppure no? Motivare!

d) **Calcolare la composizione della miscela di reazione** ed il suo flusso in uscita (in metri cubi al secondo) ammettendo che la reazione sia praticamente istantanea e che non vengano prodotte altre sostanze se non il metanolo. Attenzione al cosiddetto reagente limitante!
e) In un **sistema più vicino al caso reale** (dove la reazione **non** è istantanea), ti aspetti una diversa composizione della miscela di reazione? Perché? (risposta qualitativa!)

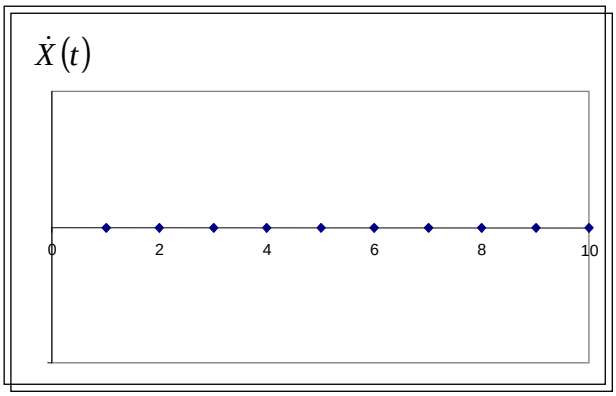
Soluzioni e commenti

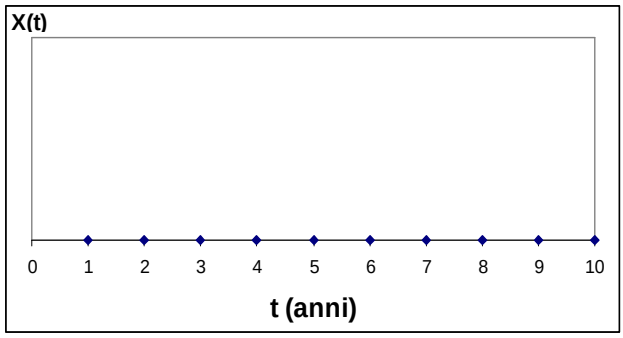
a) $2\ H_2\ (g) + 1\ CO\ (g) \rightarrow 1\ CH_4O\ (g)$
b) Tutte le sostanze sono alla stato gassoso. Si può dunque applicare il principio di Avogadro: dalla reazione di 1 m^3 di H_2 (g) si può produrre 0.5 m^3 di CH_4O (g)
c) $I_x \neq 0$: se i flussi di sostanza sono costanti c'è da attendersi che nel reattore venga a stabilirsi una situazione di regime stazionario
d) Il reagente limitante è H_2. Supponendo una reazione completa ed istantanea il flusso di metanolo gassoso all'uscita del reattore sarà di 0.5 m^3/s. All'uscita del reattore troveremo anche 0.5 m^3/s di CO che non hanno reagito.
e) In generale in un sistema reale (dove la reazione NON è istantanea) potremmo trovare in uscita dal reattore anche H_2 e CO che non hanno reagito.

Esercizio 9

L'**osteoporosi** è una malattia dello scheletro che, in seguito alla diminuzione di massa ossea e ad una modificazione della microarchitettura del tessuto osseo stesso, comporta importanti rischi di fratture soprattutto nelle donne anziane. La **diminuzione della massa ossea** nei **primi dieci anni dopo la menopausa** nelle donne normali è di molto inferiore a quella delle pazienti affette da forme clinicamente rilevanti di osteoporosi.

a) Se $\dot{X}(t)$ indica la **variazione istantanea della massa ossea** , a cosa corrisponde X?
b) Scrivi l'equazione di bilancio completa per la grandezza X.
c) Disegna nel **primo grafico** le curve di $\dot{X}(t)$ per **le donne con un metabolismo normale del calcio** e **per quelle affette da una forma di osteoporosi** clinicamente rilevante. Supponi che $\dot{X}(t)$ diminuisca linearmente nel tempo, e che la **pendenza** della **retta** $\dot{X}(t)$ nelle donne con un normale metabolismo del calcio sia **la metà** rispetto alle altre.
d) Disegna sul **secondo grafico** le curve di X(t) per **le donne normali** e **per quelle affette da una forma di osteoporosi** clinicamente rilevante durante i dieci anni dopo la menopausa.
e) Che tipo di informazioni fornisce l'area sotto la curva del primo grafico? Spiega!





Soluzioni e commenti

a) La grandezza X rappresenta semplicemente la massa ossea.
b) $\dot{X}(t) = I_{in} + I_{out} + \pi_X^+ + \pi_X^- \approx \pi_X^+ + \pi_X^-$ Le entrate e le uscite di massa ossea sono nulle: nel sangue non circolano pezzetti di osso. IL materiale che costituisce l'osso viene sintetizzato dalle cellule del tessuto osseo. Il processo di distruzione π_X^- è molto superiore a quello di sintesi π_X^+
c) Le due rette (con pendenza negativa) partono entrambi dall'origine (momento della menopausa) e restano nel campo negativo. Si noti che nel nostro modello il tasso di perdita di massa ossea varia linearmente con il tempo (abbiamo considerato solo i primi 10 anni dopo la menopausa!). Sarà di $-m_1$ grammi/giorno al momento t_1, e di $-m_2$ grammi/giorno al momento t_2
d) Le due curve saranno due parabole con pendenza negativa che partono da un certo valore X_0 . Il valore X_0 è in effetti differente da una donna all'altra. Si noti la diversa pendenza sempre più accentuata delle due curve. Dopo i primi 10 anni la perdita di massa ossea si dovrà lentamente stabilizzare (valori fuori grafico) e non seguirà più un andamento parabolico!
e) L'area "sotto" la curva di $\dot{X}(t)$ indica la perdita di massa ossea in un dato periodo.

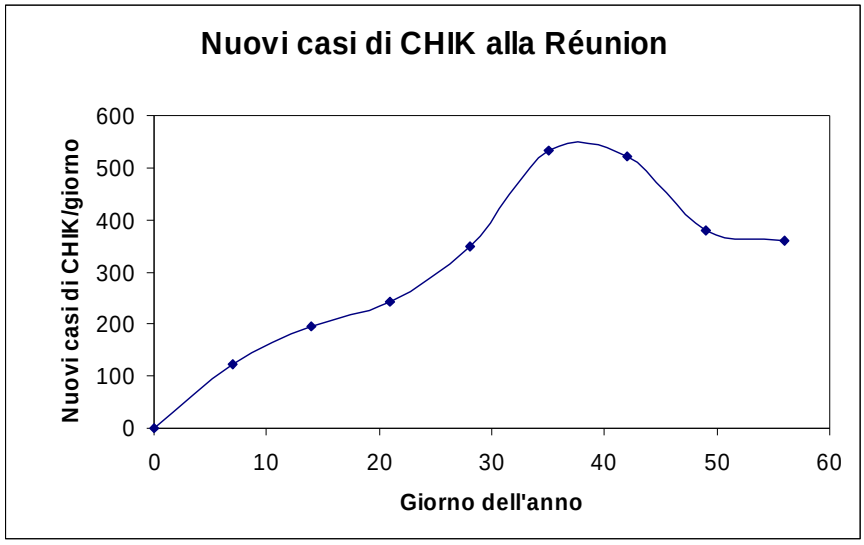
Esercizio 10: Un'epidemia su di un'isola tropicale

L'isola tropicale della Réunion, territorio francese d'oltremare al largo del Madagascar, è stata recentemente colpita da una grave epidemia di **chikungunya** (**CHIK**), una malattia febbrile acuta di tipo virale trasmessa dalla puntura di zanzare portatrici. Anche se sono stati registrati alcuni casi mortali (soprattutto in bambini ed anziani), la malattia si risolve in generale spontaneamente nell'arco di qualche settimana. Purtroppo sono frequenti i casi di pazienti con dolori articolari acuti che possono persistere anche per molti mesi. La curva (*) rappresenta il numero di **nuovi casi di chikungunya** (**CHIK**) annunciati dai medici dell'isola nel corso dei primi mesi del 2006.

Consideriamo l'intero territorio dell'isola della Réunion come sistema e analizziamo l'evoluzione del **numero di nuovi casi annunciati al giorno.**.

a) Se il numero dei **nuovi casi annunciati al giorno** corrisponde a $\dot{X}(t)$, a cosa corrisponde la grandezza X? Spiega bene!
b) Scrivi **l'equazione di bilancio** completa per la grandezza X.
c) Cosa rappresentano in questo caso π_X^+ e π_X^- ?
d) Come si può determinare a partire dalla curva sottostante **il numero di nuovi pazienti** colpiti dalla malattia **nel primo mese** dell'anno? Mostralo aiutandoti con il grafico sottostante.
e) È corretto affermare che **a partire dal quarantesimo giorno (circa)** il numero di pazienti affetti da CHIK alla Réunion è in leggero declino? Motivare bene!

(*) Curva tratta dai dati pubblicati su http://www.orsrun.net/PEHChik1603006.pdf (dati dei servizi sanitari dell'Isola della Réunion)



Soluzioni e commenti

a) La grandezza X rappresenta i casi di CHIK (cioè il numero di pazienti) al momento t.
b) $\dot{X}(t) = I_{in} + I_{out} + \pi_X^+$ e $\pi_X^- \approx \pi_X^+$ e π_X^- (le entrate e le uscite di malati dall'isola sono piccole)
c) π_X^+ : casi di infezione/giorno. π_X^- : casi di guarigione (o morte)/giorno
d) Area sotto la curva (fino al giorno 30)
e) No! Solo il numero dei nuovi casi/giorno è in diminuzione. Il numero di malati al tempo t aumenta ancora (ma più debolmente). Si osservi che i pazienti guariscono solo dopo diverse settimane. Per i servizi sanitari è molto difficile rilevare il numero totale dei pazienti ammalati all'istante t (soprattutto se non gravi) oppure di quelli che sono definitivamente guariti. Nel monitoraggio delle epidemie si raccolgono di solito le segnalazioni dei nuovi casi o dei decessi.